Enseignant: Mathieu Huruguen
Algèbre linéaire - CMS
21 avril 2023
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 3 (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 7 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne la base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ avec :

$$v_1 = (1, 0, -2)\,,\ v_2 = (0, 0, 5)\,,\ v_3 = (3, 1, 1)$$

ainsi que l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (2x - 7y + 11z, x - y + 7z, -5y - 3z)\,.$$

Question 1 *(2 points)* Quel est le coefficient de v_1 dans la décomposition de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur la base $\mathcal{B}$?

- ☐ $x + 3z$
- ☐ $x + 3y$
- ☐ x
- ■ $x - 3y$

Question 2 *(2 points)* Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la première colonne de $[f]_{\mathcal{B}}$?

- ■ -13
- ☐ -17
- ☐ 6
- ☐ 0

Question 3 *(2 points)* Que peut-on-dire de l'ensemble $f^{-1}(\{v_3\})$?

- ☐ il ne contient qu'un seul élément
- ☐ il est vide
- ■ il se représente par une droite dans l'espace
- ☐ il se représente par un plan dans l'espace

Enoncé

Notons $\mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2, e_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne deux applications linéaires :

$$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de matrices respectives :

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \quad \text{et} \quad B = [g]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

en base canonique. On suppose qu'en faisant subir à A les opérations suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1\,,\ L_2 \leftarrow 2L_2\,,\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2\,,\ L_1 \leftrightarrow L_3\,,$$

on obtient la matrice B.

Question 4 *(1 point)* Si $\det f = 12$, combien vaut $\det g$?

- [x] -24
- [ ] 6
- [ ] 24
- [ ] -6

Question 5 *(2 points)* Sélectionner les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous qui vérifient que:

$$B = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ 2e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ 2e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ \frac{1}{2}e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ \frac{1}{2}e_2,\ e_1 \end{cases}$

Question 6 *(1 point)* On sait que :

$$\operatorname{Ker} g : x = \frac{y}{2} = z.$$

Parmi les triplets suivants, un seul appartient à $\operatorname{Ker} f$. Lequel ?

- [ ] $(1, 2, 1)$
- [ ] $(5, 1, 1)$
- [ ] $(1, 1, 1)$
- [x] $(3, 1, 1)$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 7 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ on donne, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dans le cas où $\alpha = -1$, montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

(b) Prenons $\alpha = 2$. En détaillant votre réponse, trouver une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer le rang de A en fonction de la valeur de α.

Solution

(a) Pour $\alpha = -1$ on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour établir que A est inversible et calculer son inverse, résolvons le système linéaire général de matrice A. On obtient :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = a \\ -3x + 3y + z = b \\ x + 6y + 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = a \\ 12y + 7z = 3a + b \\ 3y + 2z = -a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - (-a + c) \\ 3y + 2z = -a + c \\ -z = 3a + b - 4(-a + c) = 7a + b - 4c \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - c \\ y = \frac{1}{3}(-a + c - 2(-7a - b + 4c)) \\ z = -7a - b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - c \\ y = \frac{13}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{7}{3}c \\ z = -7a - b + 4c. \end{cases}$$

On trouve donc toujours une unique solution. La matrice A est donc bien inversible, et on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour $\alpha = 2$ on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Appelons L_1, L_2 et L_3 ses lignes. On voit alors que :

$$L_2 + 3L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 - L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$L_2 + 3L_1 = 2(L_3 - L_1) \quad \text{ou encore que} \quad L_2 = -5L_1 + 2L_3.$$

La matrice A admet donc la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} L_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A n'est pas de rang inférieur ou égal à 1 (ses lignes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles) on voit donc qu'elle est de rang 2 et que la décomposition que l'on vient d'écrire est minimale.

(c) Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 6-\alpha \\ 0 & 4+\alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6-\alpha \\ 4+\alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha.$$

Si $\alpha \neq 0, 2$ alors le déterminant de A est non nul, si bien que A est de rang 3. Si $\alpha = 2$ on a vu au (b) que A est de rang 2. Enfin, pour $\alpha = 0$ on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les colonnes de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles : elle est donc de rang supérieur ou égal à 2. Or son déterminant est nul : elle est donc de rang 2.

Question 8: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5 6 7 8

On donne l'application linéaire suivante :

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\quad (x,y,z) \to (x-y+2z, -7x+4y-11z, -3x+2y-5z).$$

(a) Montrer que f est de rang 2.

(b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une équation de $\operatorname{Im} f$.

(c) En justifiant votre réponse, donner des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conseil de rédaction : commencez par écrire vos choix de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, puis faites les vérifications nécessaires.

(d) Même question qu'au (c) mais avec la **condition supplémentaire** que la première ligne de la matrice:

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

est nulle. Pour cette question, aucune justification n'est demandée.

Solution

(a) La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & -11 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les lignes (ou les colonnes) de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, si bien que f est de rang supérieur ou égal à 2. Pour décider entre le rang 2 et le rang 3, on peut par exemple calculer le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & -11 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi constater que les colonnes de A, ou encore ses lignes sont liées :

$$C_1 - C_2 = C_3\ ,\ \ L_2 = 2L_1 + 3L_3.$$

(b) On trouve :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-y+2z=0 \\ -7x+4y-11z=0 \\ -3x+2y-5z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-y+2z=0 \\ -3y+3z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = z(-1,1,1).$$

La droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$ admet donc pour base $(-1,1,1)$. Le plan vectoriel $\operatorname{Im} f$ contient :

$$f(1,0,0) = (1,-7,-3)\,,\ f(0,1,0) = (-1,4,2)\,,\ f(0,0,1) = (2,-11,-5).$$

Prenons par exemple les deux premiers triplets : comme ils ne sont pas proportionnels, ils forment une base de $\operatorname{Im} f$. On trouve alors l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -7 & 4 & y \\ -3 & 2 & z \end{vmatrix} = -2x + y - 3z = 0.$$

(c) Posons :

$$\underbrace{v_1 = (1,0,0)\,,\ v_2 = (0,1,0)\,,\ v_3 = (-1,1,1)}_{\mathcal{B}} \qquad \underbrace{v_1' = (1,-7,-3)\,,\ v_2' = (-1,4,2)\,,\ v_3' = (0,0,1)}_{\mathcal{B}'}$$

Procédons aux vérifications nécessaires. Tout d'abord $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont bien des bases de $\mathbb{R}^3$, comme on peut le vérifier en calculant les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ensuite, on a bien :

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1' \\ f(v_2) = v_2' \\ f(v_3) = (0,0,0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Modifications à apporter : il faut maintenant choisir v_2 de sorte que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v_2, v_3),$$

puis modifier $v_2' = f(v_2)$ en accord. On peut par exemple prendre :

$$\underbrace{v_1 = (1,0,0)\,,\ v_2 = (1,2,0)\,,\ v_3 = (-1,1,1)}_{\mathcal{B}} \qquad \underbrace{v_1' = (1,-7,-3)\,,\ v_2' = (-1,4,2)\,,\ v_3' = (0,0,1)}_{\mathcal{B}'}.$$